



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală, Neamț**  
**08.02.2025**  
**Clasa a VIII-a**

**Problema 1.** Se dau mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x = a(a+2), a \in \mathbb{Z}\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2 + 2b - b^2, b \in \mathbb{Z}\}.$$

- a. Demonstrați că:  $a < \sqrt{a^2 + 2a} < a + 1, \forall a > 0$  și  $-a - 2 < \sqrt{a^2 + 2a} < -a - 1, \forall a < -2$ ;
- b. Demonstrați că dacă un număr real nenul are pătratul în mulțimea A atunci acel număr este irațional;
- c. Determinați  $A \cap B$ ;
- d. Demonstrați că  $A \cup B$  are un singur element care este pătrat perfect.

**Problema 2.** Fie  $ABCD A'B'C'D'$  un cub cu  $AB = a\sqrt{2}, a \in \mathbb{R}_+^*$  și  $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ . Fie M simetricul lui B față de dreapta AD. Se cer:

- a. Arătați că  $MD \perp (D'DB)$ ;
- b. Calculați distanța de la M la  $D'B$ ;
- c. Demonstrați că  $D'B \perp DO'$ .

**Problema 3.** Fie a, b două numere reale care verifică relațiile  $a \cdot b = 1$  și  $\frac{a}{\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{b}{\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ .

- a. Să se demonstreze egalitatea  $\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}$ ;
- b. Să se determine numerele reale a și b care îndeplinesc condițiile din enunț.

**Problema 4.** Fie o piramidă triunghiulară oarecare  $[ABCD]$ . Notăm cu E, respectiv cu F proiecțiile vârfului A pe bisectoarele unghiurilor  $\angle ABC$  și respectiv  $\angle ABD$ .

- a. Dacă M este mijlocul laturii AB, să se demonstreze că  $ME \parallel (BCD)$ ;
- b. Să se arate că  $EF \parallel (BCD)$ ;
- c. Dacă notăm cu P punctul de intersecție al bisectoarei  $\angle ABC$  cu AC, Q punctul de intersecție al bisectoarei  $\angle ABD$  cu AD, stabiliți natura triunghiului BCD astfel încât PQ este paralelă cu planul (BCD).

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se evaluează cu note de la 0 la 7.

**Punctajul maxim este de 28 de puncte.**

**Timp de lucru: 3 ore.**